

安徽省 2021 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

《高等数学》

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 4 分，共计 48 分）

1. 当  $x \rightarrow 0$  时，与  $x$  等价无穷小量是

- A.  $\tan x$                       B.  $1 - \cos x$                       C.  $\sqrt{1+x} - 1$                       D.  $\ln(1+2x)$

2. 设函数  $f(x)$  在  $x=1$  处可导，且  $f'(1)=1$ ，则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} =$

- A. -2                      B. -1                      C. 1                      D. 2

3. 函数  $f(x) = -\frac{2}{x^3}$  在区间  $(-1, 0)$  内

- A. 有极大值                      B. 有极小值                      C. 单调增加                      D. 单调减少

4. 若函数  $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{2}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ ，在  $x=0$  处连续，则  $a =$

- A.  $e^{\frac{1}{2}}$                       B.  $e^2$                       C.  $e^{-\frac{1}{2}}$                       D.  $e^{-2}$

5. 曲线  $2x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$  在点  $(1, 1)$  处的切线方程为

- A.  $x + y - 2 = 0$                       B.  $2x + y - 3 = 0$   
C.  $x - 2y + 1 = 0$                       D.  $x - y = 0$

6. 设函数  $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ ，则  $F'(x) =$

- A.  $\sqrt{1+x^2}$                       B.  $\sqrt{1+x^6}$                       C.  $3x^2\sqrt{1+x^2}$                       D.  $3x^2\sqrt{1+x^6}$

7. 设  $e^{-x}$  是函数  $f(x)$  的一个原函数，则下列各式正确的是

- A.  $\int f(x) dx = e^{-x}$                       B.  $d[f(x) dx] = -e^{-x} dx$   
C.  $\int f'(x) dx = e^{-x}$                       D.  $d[f'(x) dx] = -e^{-x} dx$

8. 方程  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$  根的个数为

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

9. 若线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = a \\ x_1 - x_3 = b \end{cases}$  有解, 则  $a, b$  满足

- A.  $a+b=1$                       B.  $a+b=-1$                       C.  $a+b=0$                       D.  $a+b=2$

10. 设  $A, B$  为两个  $n$  阶方阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 若  $AB=E$ , 则下列结论不成立的是 ( )

- A.  $B$  是可逆矩阵                      B. 齐次线性方程组  $BX=0$  有非零解  
C.  $B$  的秩为  $n$                       D.  $B$  的列向量线性无关

11. 某校有 50 名篮球队员, 其中男队员 30 名, 女队员 20 名, 假设该校男队员定点投篮命中的概率为 0.7, 女队员为 0.6, 现从这 50 名篮球队员中随机抽选 1 名队员进行定点投篮测试, 则该队员命中的概率为

- A. 0.64                      B. 0.65                      C. 0.66                      D. 0.67

12. 设  $A$  和  $B$  是任意两个相对独立的随机事件, 且  $P(B) > 0$ , 则下列各式正确的是

- A.  $P(\overline{AB}) = P(A)$                       B.  $P(A|B) = P(A)$   
C.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$                       D.  $P(\overline{AB}) = P(B) - P(A)$

(II) 非选择题部分

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

13. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = -3$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 函数  $y = -x^3 + 3x^2 + 6$ , 则函数的拐点为 \_\_\_\_\_.

15.  $\int_{-1}^1 (x^{2021} + |x|) dx =$  \_\_\_\_\_.

16. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A^2 + 2A =$  \_\_\_\_\_.

17. 离散随机变量  $X$  的分布列  $P(X=k) = \frac{a}{1+k}, k=1,2,3$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

18.  $X \sim N(1, 5^2)$ , 则  $P(|x-1| \leq 5) =$  \_\_\_\_\_, ( $\phi(1) = 0.8413$ ,  $\phi(x)$  为标准正态分布的分布函数)。

三、解答题 (本大题共 6 小题, 其中 19-21 小题每小题 10 分, 22 小题 12 分, 22 小题 10 分, 第 24-25 小题 13 分, 共计 78 分)

19. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{x - e^x + 1}$ .

20. 求不定积分  $\int \cos \sqrt{x+1} dx$ .

21. 函数  $z = \ln(xy) + \frac{y}{x}$ , 证明:  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$ .

22. 设  $D$  是曲线  $y = x^2$  与直线  $y = -x$  所围成的图形,

(1) 求  $D$  的面积;

(2) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

23. 设函数  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上连续, 在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  上可导, 且  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . 证明至少存在一点  $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,

使得  $f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \cos \xi = 0$  成立.

24. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 将  $A$  的第一行乘 3 加到第二行得矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

(1) 求  $a, b$ ;

(2) 判断  $A$  是否可逆, 若可逆, 求  $A^{-1}$ .

25. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 其中  $a$  为常数,

(1) 求  $a$ ;

(2) 求  $P\left(\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right)$  及方差  $D(X)$ .